18/04/2019

# Μάθημα 14ο

## Διαγράμματα Φάσης

$\ddot{x} = f(x,\dot{x})$

① Δ.Ο. η f είναι διατηρητική άρα $\exists V(x)$. Μπορούμε να βρούμε την Κ.Σ. ή Σ.Ι. για την $V'(x)$.

② Α.Δ.Μ.Ε. : $T+V=E$

③ Να λύσω την διαφορική εξίσωση $\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases}$

Αν είναι μη γραμμική τότε αναπτύσσω την $f(x,y)$ σε ανάπτυγμα Taylor γύρω από το $(x_0,y_0)$ και ουσιαστικά γραμμικοποιώ την μη-γραμ. ΔΕ.

## Παράδειγμα (ασκ 32)

$\ddot{x} = x^3 - x$

πιο γενικός τύπος — μη γραμ. όρος

Θα μπορούσα να την γράψω και ως: $m\ddot{x} = -kx + \varepsilon x^3$, $0<\varepsilon<1$.

μη γραμμ. αρμονικός ταλαντωτής — ΣΔΕ, 2ης τ., 1ου β., μη-γραμ. ομογ.

και δεν έχει τριβές

Δεν μπορώ να το λύσω.

Άρα Σ.Ι. και ανάπτυγμα Taylor για επίλυση

Θεωρούμε ότι $m=k=\varepsilon=1$ και δουλεύω στην $\ddot{x} = x^3 - x$

Για πιθανά Σ.Ι. $\Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

ⓐ η $f(x)$ είναι διατηρητική?

ΝΑΙ, διότι: είναι $\bar{F}(x) = (f(x),0,0)$ θέλω να το γράψω ως δ.π.

και παίρνω: $\bar{\nabla}\times\bar{f} = \dots = \bar{0}$

Άρα η f είναι διατηρητική, και έτσι;

$$\exists V(\bar{r}) : \quad \bar{f} = -\bar{\nabla} r \iff$$

$$\iff \begin{cases} f = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \iff f(x) = -\dfrac{dV}{dx} \\[2ex] \left.\begin{aligned} 0 &= -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ 0 &= -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = V(x) \end{cases}$$

<u>Άρα:</u> $\boxed{V(x) = -\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} + C}$ Δυναμικό

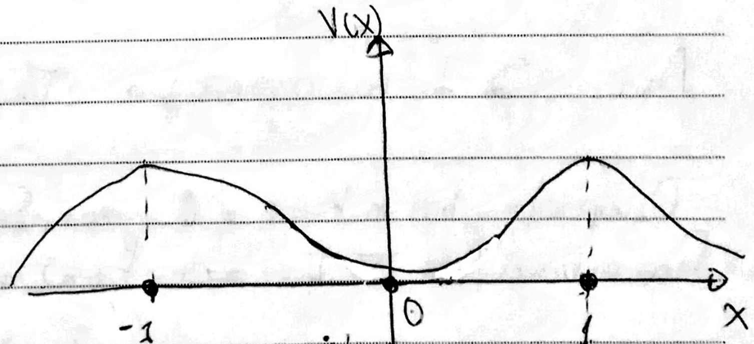
<u>ΑΔΜΕ:</u> $\boxed{\underbrace{\dfrac{1}{2}(\dot{x})^2}_{T(x)} + \underbrace{\left(-\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}\right)}_{V(x)} = C = E}$

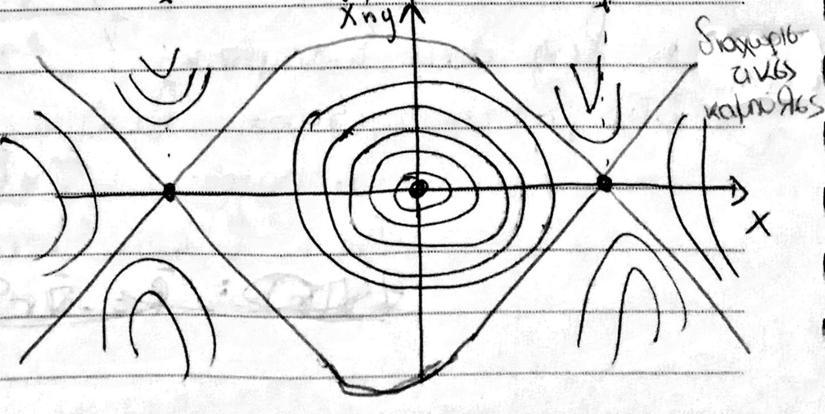
$$V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C \ , \quad \frac{dV(x)}{dx} = -f(x) = -x^3 + x \ ,$$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -3x^2 + 1$$

<u>$x = 0$</u> : $V''(x) > 0$

<u>$x = \pm 1$</u> : $V''(x) < 0$



$x = 0$ : $\ddot{x} + x = 0$ ή $\ddot{x} = -x$ ευσταθές ΣΙ.

$x = \pm 1$ : $\ddot{x} - x = 0$ ή $\ddot{x} = x$ ασταθές ΣΙ.

(Επίσης μπορώ να καταλήξω σε αυτές τις Δ.Ε. με το ανάπτ. Taylor)

## Ευστάθεια ή γραμμικοποίηση συστημάτων

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Κρίσιμο σημείο : $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$

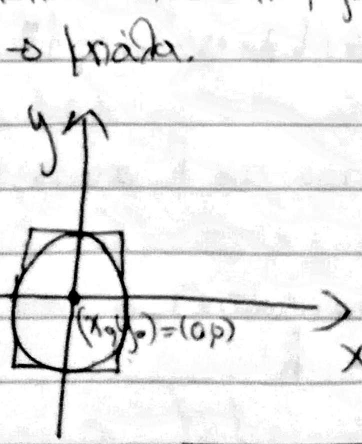
Σημείο Ισορροπίας : $(x_0,y_0)$

Θέτουμε : $\begin{cases} u = (x - x_0) \\ v = (y - y_0) \end{cases}$

Γιατί θέλω να γραμμικοποιήσω την $f$ και $g$ γύρω από το ΚΣ.

Άρα
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u + x_0, v + y_0) = f_1(u,v) \\ \dfrac{dv}{dt} = g(u + x_0, v + y_0) = g_1(u,v) \end{cases}$$

Στην περιοχή του $(x_0,y_0)$ μπορώ να γράψω ότι :
Στον $\mathbb{R}^2$ → μπάλα.




Περιοχή του $x_0$ στον $\mathbb{R}$ :
(γειτονιά του $x_0$)
$\forall \varepsilon > 0 : |x_0 - x| < \varepsilon$

$x_0 - \varepsilon$   $x_0$   $x_0 + \varepsilon$   $\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 : \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \varepsilon$ και $|y - y_0| < \varepsilon$ Άρα τετράγωνο

Μπορώ να γράψω ότι:

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} v + \underbrace{\boxed{r(u,v)}}_{\text{σφάλμα}}$$

Τα $(u,v) \to$ πόσο μακριά τρέχω.
Οι $f, g$ πρέπει να είναι διαφορίσιμες στο σημείο και οι παράγωγοι να ορίζονται και να είναι φραγμένες (Προϋποθέσεις Taylor)

Ισχύει: $r(u,v) \to 0$ όταν $(u,v) \to (0,0)$
↳ σφάλμα (απομάκρυνσης)

Άρα:

$$(1): \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f_x(x_0,y_0)\,u + f_y(x_0,y_0)\,v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = g_x(x_0,y_0)\,u + g_y(x_0,y_0)\,v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \quad (= J : \text{Ιακωβιανός})$$

$\Leftrightarrow \dot{u} = Au$ , σύστημα ΣΔΕ (2 ΔΕ), 1ης τάξης, γραμμικό, ομογενές.

Η γραμμικότητα δεν εξαρτάται πλέον από την $f$ αφού την γραμμικοποίησα

Θέλω να μελετήσω την ευστάθεια του συστήματος. Άρα θα δω τι γίνεται με τον πίνακα $A$.

Συμπέρασμα: Πρέπει να μελετήσουμε ένα γραμμικό σύστημα $\boxed{\dot{u} = Au}$

## Παράδειγμα

$f(x,y) = 3x - x^2 - xy$

$g(x,y) = y + y^3 - 3xy$

Κ.Σ.: $f = g = 0$

$\Downarrow$

$(0,0)\ ,\ (0,-1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (3,0)$

Έστω το $(x_0,y_0) = (1,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2x - y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = -x$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -3y \ , \ \frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 3y^2 - 3x$

Άρα $J(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ περιμένουμε εδώ να παράγει λύση της μορφής $e^{At}$

Άρα: πρέπει να μελετήσουμε το $\dot{u} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} u$

Πρέπει να μελετήσω την ευστάθεια γραμμικών συστημάτων:

$\boxed{\dot{x} = -kx} \iff x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$

Άρα για να βγάλουμε συμπεράσματα για το σύστημα, $\dot{u} = Au$, αρκεί να μελετήσω τις ιδιοτιμές του $A$, δηλ.:

$|A - \lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b \cdot c = 0$

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Η λύση των ιδιοτιμών είναι:

α) πραγματικές, διακριτές με το ίδιο πρόσημο

β) πραγματικές, διακριτές, με διαφορετικό πρόσημο

γ) πραγματικές, ίσες

δ) μιγαδικές

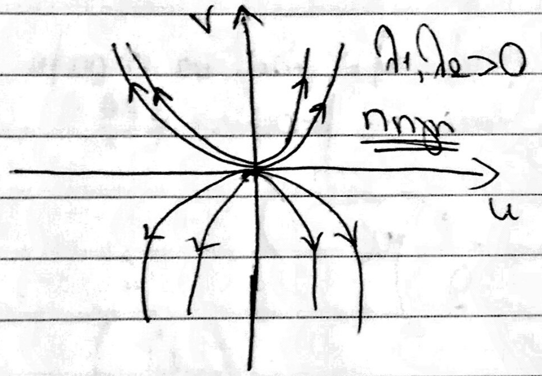
ε) φανταστικές με $Re = 0$

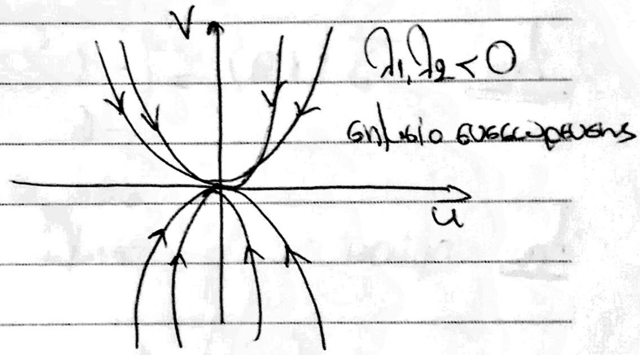
Επίλυση:

(α) $\lambda_1, \lambda_2$

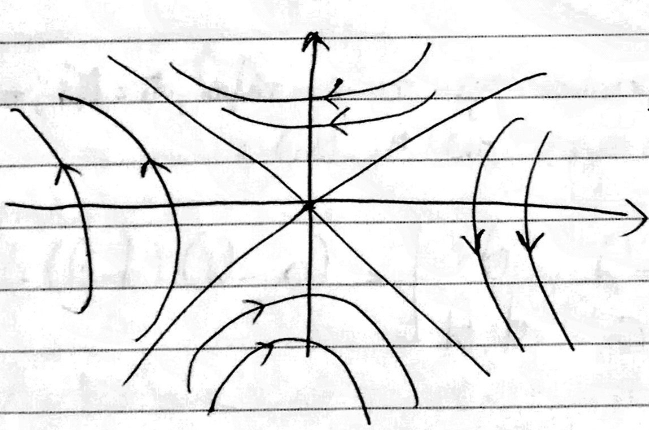
$u(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$ άρα $V = C \cdot u^k$, $k = \lambda_2/\lambda_1 > 0$

$v(t) = c_3 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t}$



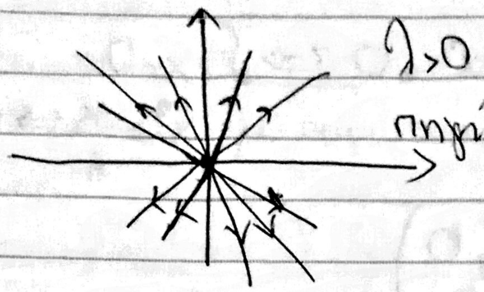



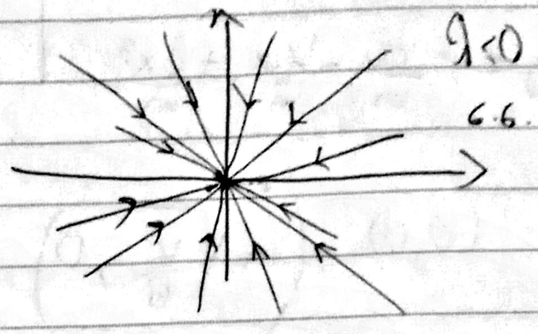

(β) $v = c \cdot u^k$, $k = \lambda_2/\lambda_1 < 0$



Σαγματικό σημείο

(γ) Πραγματικός και ίσες $\lambda_1 = \lambda_2$. $V = cu$ (ευθείες)



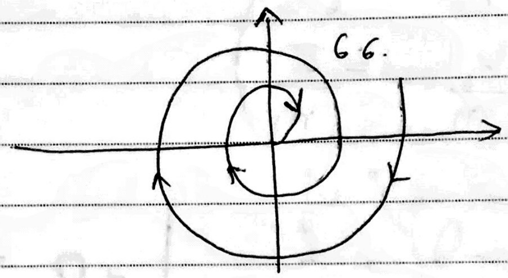



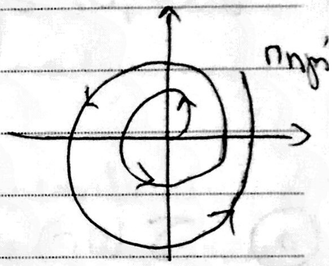

(δ) $\lambda = p + iq$, $\bar{\lambda} = p - iq$ ιδιοτιμές

$\bar{v} = \bar{a} + i\bar{b}$, $\bar{v}^* = \bar{a} - i\bar{b}$ ιδιοδιανύσματα.

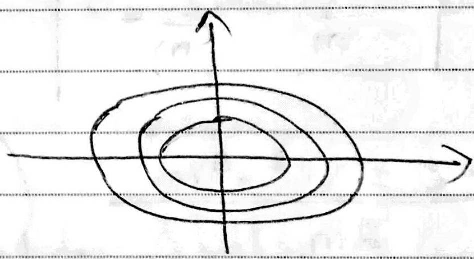
Λύσεις της μορφής: $\bar{x}(t) = e^{pt}(\bar{a}\cos(qt) - \bar{b}\sin(qt))$

Αν $p>0$, σ.σ.
Αν $p<0$, πηγή




(ε) φανταστικός: $p=0$



Παράδειγμα → είναι διατηρητική αυτή η δύναμη F;

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + \beta x^3$$

Απλός αρμονικός ταλαντωτής

$\ddot{x}$ → επιτάχυνση

$\dot{x}$ → ταχύτητα

$-c\dot{x}$ → όρος τριβής που εξαρτάται από την ταχύτητα

Η ΔΕ περιγράφει ένα μη γραμμικό ελατήριο με όρους απόσβεσης (τριβής)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{c}{m}y - \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}x^3 \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{aligned} & y = 0 \\ & -kx + bx^3 = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{k}{b} \iff x = \pm\sqrt{\frac{k}{b}} \end{cases} \end{aligned}$$

Κ.Ι.: $(0,0)$, $\left(-\sqrt{\frac{k}{b}}, 0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{k}{b}}, 0\right)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} + \frac{3b}{m}x^2 & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}$$

$f_x = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $f_y = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

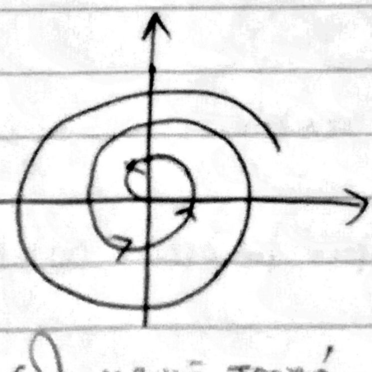
(a) $J(0,0)$: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$

άρα $\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$

i) $c^2 - 4km > 0$, σσ. ευσταθές σημείο

ii) $c^2 - 4km < 0$, σπυροειδής συσσώρευση

(b) $J\left(\pm\sqrt{\frac{k}{b}}, 0\right)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2k/m & -c/m \end{pmatrix}$



ελικοειδής τροχιά

Τα Κ.Ι. $\left(\pm\sqrt{k/b}, 0\right)$ ασταθή ΣΙ. Σαγματικά σημεία.